

Untersuchung der Stabilität eines gravitierenden Plasmas in gekreuzten Magnetfeldern

Von F. MEYER

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München
(Z. Naturforsch. 13 a, 1016–1020 [1958]; eingegangen am 30. August 1958)

Es wird die Stabilität einer Plasmaanordnung untersucht. Dabei wird ein gravitierendes Plasma mit horizontalem innerem Magnetfeld von einem dagegen um den Winkel α verdrehten horizontalen Vakuummagnetfeld getragen. Das Beispiel ist eine Erweiterung des von KRUSKAL und SCHWARZSCHILD untersuchten Falles $\alpha=0$ mit parallelem innerem und äußerem Feld. Es ergibt sich die Stabilisierbarkeit aller Störungen mit kleinen Wellenlängen einschließlich der KRUSKAL-SCHWARZSCHILD-Instabilität durch endliche Verdrehungswinkel α . Für große Wellenlängen tauchen stets instabile Störungen auf von der Art hydromagnetischer RAYLEIGH-TAYLOR-Instabilitäten.

The stability of a plasma in crossed magnetic fields is investigated for the following equilibrium configuration. A plasma with an interior horizontal magnetic field is supported against gravity by a horizontal vacuum magnetic field which is inclined at some angle α to the interior field. This example is an extension of the case $\alpha=0$ investigated by KRUSKAL and SCHWARZSCHILD. It is found that for all disturbances with small wave lengths, including those disturbances which give the KRUSKAL-SCHWARZSCHILD instability, stability can be restored by using a non-zero α . Perturbations of sufficiently large wave lengths are found unstable for every α and every ratio of field strength.

Schichtet man eine schwere Flüssigkeit über eine leichte, so ist ein solches Gleichgewicht instabil. Eine Welligkeit der Grenzfläche wächst dadurch an, daß die in den Wellentälern absinkende schwere Flüssigkeit mehr Gravitationsenergie gewinnt als die in den Wellenbergern aufsteigende leichte aufwenden muß.

Die gleiche Instabilität fanden KRUSKAL und SCHWARZSCHILD¹ bei einem gravitierenden Plasma, das von einem Vakuummagnetfeld getragen wird. Die instabile Störung der Grenzfläche ist dabei so gerichtet, daß die Magnetfeldlinien parallel zu den Wellen mitgehoben und mitgesenkt werden. Dadurch tauschen in Wellenberg und Wellental nur Plasma und Vakuummagnetfeld unter Gewinn von Gravitationsenergie ihren Platz. Das gilt auch dann, wenn im Plasma ein dem Vakuumfeld paralleles Magnetfeld vorhanden ist.

Ein solcher bloßer Austausch wird unmöglich gemacht, wenn das Magnetfeld im Plasma gegenüber dem Feld im Vakuum gekreuzt ist. Mit jeder Wellung der Grenzfläche ist dann eine entsprechende Wellung anliegender Feldlinien verbunden. Man wird erwarten, daß der dafür erforderliche Energieaufwand stabilisierend wirkt.

Die Stabilität einer solchen Anordnung wird in dieser Arbeit untersucht. Sie dient als ein Beispiel für den stabilisierenden Einfluß von gekreuzten

Magnetfeldern. Wir schließen uns dabei in der Bezeichnung an die Arbeit¹ von KRUSKAL und SCHWARZSCHILD an.

1. Grundgleichungen

Wir gehen von den folgenden Grundgleichungen aus:

a) *im Plasma*

Bewegungsgleichung

$$\varrho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad } p + \mathbf{j} \times \mathfrak{B} + \varrho \mathbf{g}, \quad (1)$$

Kontinuitätsgleichung

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

Energiegleichung

$$\frac{dp}{dt} = \gamma \frac{p}{\varrho} \frac{d\varrho}{dt}, \quad (3)$$

Induktionsgesetz

$$\text{rot } \mathfrak{E} = -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}, \quad (4)$$

Verkettungsgesetz

$$\text{rot } \mathfrak{B} = \mathbf{j}, \quad \text{div } \mathfrak{B} = 0, \quad (5)$$

„Ohmsches Gesetz“

$$\mathfrak{E} + \mathbf{v} \times \mathfrak{B} = 0; \quad (6)$$

b) *im Vakuum*

Vektorpotential

$$\mathfrak{B} = \text{rot } \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{E} = -\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}, \quad (7)$$

¹ M. KRUSKAL u. M. SCHWARZSCHILD, Proc. Roy. Soc., Lond. A 223, 348 [1954].



Vakuumbfeldgleichung

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = 0, \quad \Delta \mathfrak{A} = 0; \quad (8)$$

c) an der Grenzfläche, Kontinuität für

„Normalspannungen“

$$\frac{1}{2} (\mathfrak{B}^V - \mathfrak{B}^P) = p, \quad (9)$$

„Tangentialspannungen“

$$(\mathfrak{B}^V, \mathbf{n}) = (\mathfrak{B}^P, \mathbf{n}) = 0, \quad (10)$$

Tangentialkomponente von \mathfrak{E}

$$\mathbf{n} \times \mathfrak{E}^V = \mathbf{n} \times \mathfrak{E}^P. \quad (11)$$

Wie üblich bezeichnen ϱ , p und v Dichte, Druck und Geschwindigkeit des Plasmas, \mathfrak{E} und \mathfrak{B} elektrische und magnetische Feldstärke, \mathfrak{A} das Vektorpotential, \mathbf{j} die Stromdichte, g die Gravitationsbeschleunigung, \mathbf{n} die Einheitsnormale der Grenzfläche und γ das Verhältnis der spezifischen Wärmen. Die Indizes P und V kennzeichnen Größen im Plasma und Vakuum.

Bei der Ableitung dieser Gleichungen² wurde eine unendliche Leitfähigkeit des Plasmas angenommen, der Verschiebungsstrom und die elektrische Kraftdichte sind als klein vernachlässigt. Der Einfachheit halber wurde weiter vorausgesetzt, daß im Vakuum kein statisches elektrisches Feld vorhanden ist. Außerdem werden die Bewegungen des Plasmas als adiabatisch betrachtet.

2. Gleichgewicht

Wir führen ein rechtwinkliges Koordinatensystem x, y, z ein. Dessen Einheitsvektoren seien $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$. Dabei zeige die y -Achse nach oben,

$$g = -g \mathbf{e}_y. \quad (12)$$

Wir wollen jetzt die folgende Gleichgewichtsanordnung untersuchen.

Das Plasma befinde sich in Ruhe oberhalb der Grenzfläche $y=0$. Druck und Dichte besitze die barometrische Verteilung

$$p = p_0 \exp(-h y), \quad \varrho = \varrho_0 \exp(-h y). \quad (13)$$

Der Druck des Magnetfeldes im Plasma soll derselben Höhenformel gehorchen. Entsprechend sei also

$$\mathfrak{B} = B_0^P \exp\left(-\frac{h}{2} y\right) \mathbf{e}_z. \quad (14)$$

Dann erfordert das Gleichgewicht für den Kehrwert der „homogenen Schichtdicke“

$$h = \frac{g \varrho_0}{p_0 + \frac{1}{2} (B_0^P)^2}. \quad (15)$$

Der zu (14) gehörige Strom ist

$$\mathbf{j} = -\frac{h}{2} B_0^P \exp\left(-\frac{h}{2} y\right) \mathbf{e}_x. \quad (16)$$

Das Vakuummagnetfeld im Raum $y < 0$ sei gegen das Plasmafeld um den Winkel α gedreht,

$$\mathfrak{B} = B_0^V (\sin \alpha \mathbf{e}_x + \cos \alpha \mathbf{e}_z). \quad (17)$$

Die Bedingungen an der Grenzfläche verknüpfen beide Felder durch

$$\frac{1}{2} [(B_0^V)^2 - (B_0^P)^2] = p_0. \quad (18)$$

Die beiden Vektoren \mathbf{v} und \mathfrak{E} sind identisch Null.

Diese Gleichgewichtskonfiguration weicht von der von KRUSKAL und SCHWARZSCHILD untersuchten außer durch den Drehwinkel $\alpha \neq 0$ auch in der Wahl des Plasmafeldes (14) ab, das KRUSKAL und SCHWARZSCHILD homogen ansetzten. Unsere Festlegung hat den Vorteil, daß sich in der späteren Störungsrechnung die Exponentialfaktoren $\exp(-h y)$ zwischen Druck und Magnetfeld exakt herausheben und die Rechnung damit auch auf den Fall großer Wellenlängen anwendbar wird. In der von den genannten Autoren benutzten Näherung kleiner Wellenlängen stimmt das Ergebnis der Störungsrechnung für beide Fälle überein, wenn man die andere Definition

$$h_{KS} = g \varrho_0 / p_0 \quad (19)$$

der (15) entsprechenden homogenen Schichtdicke beachtet. Das zeigt die entsprechende Rechnung.

3. Störungsrechnung

Wir untersuchen jetzt kleine Abweichungen von der Gleichgewichtslage (13) bis (18) und kennzeichnen sie mit einer Tilde. Dabei werde ein Exponentialfaktor der ungestörten Größe auch in der Störung abgespalten:

$$p = \exp(-h y) \cdot (p_0 + \tilde{p}), \quad (20)$$

$$\mathfrak{B} = \exp\left(-\frac{h}{2} y\right) \cdot (B_0^P \mathbf{e}_z + \tilde{\mathfrak{B}}), \quad \mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}},$$

entsprechend für ϱ und \mathbf{j} . Im Vakuum setzen wir

$$\mathfrak{B} = B_0^V (\sin \alpha \mathbf{e}_x + \cos \alpha \mathbf{e}_z) + \operatorname{rot} \tilde{\mathfrak{A}}. \quad (21)$$

Die Grundgleichungen werden in den Störgrößen linearisiert. Nach Herausheben der Exponentialfaktoren werden sie zu einem linearen, homogenen Differentialgleichungssystem für die Störungen. Jede Lösung dieses Systems läßt sich als Superposition von Elementarlösungen darstellen. Wir brauchen nur noch deren Stabilität zu untersuchen. Dazu setzen wir

$$\tilde{p} = \hat{p} \exp\{i k_x x - k_y y + i k_z z + \omega t\} \quad (22)$$

² Vgl. z. B. A. SCHLÜTER, Z. Naturforschg. 5 a, 72 [1950].

usw. im Plasma, sowie

$$\hat{\mathfrak{U}} = \hat{\mathfrak{U}} \exp\{i k_x x + k_y^V y + i k_z z + \omega t\} \quad (23)$$

im Vakuum.

Dabei kennzeichnen die reellen Werte von k_x und k_z die Störung der Grenzfläche. Die Größen k_y^P und k_y^V geben das Abklingen dieser Störung ins Plasma und ins Vakuum an. Da die Abweichungen vom Gleichgewicht als klein vorausgesetzt sind, kommen für k_y^P und k_y^V nur positive Realteile in Frage. Die Frequenz ω entscheidet über die Stabilität der Störung. Diese ist dann stabil, wenn ω rein imaginär ist.

Mit den Ansätzen (22) und (23) wird aus dem Dgl.system der Störgrößen \tilde{p}, \dots ein System algebraischer, homogener Gleichungen für die Vorfaktoren \hat{p}, \dots . In diesem System führen wir die folgenden dimensionslosen Größen und Winkel ein.

$$k_x = k \sin \vartheta, \quad k_z = k \cos \vartheta, \quad \beta = \vartheta - \alpha, \quad (25)$$

$$R = \frac{(B_0^P)^2}{\gamma p_0}, \quad H = \frac{h}{\gamma k}, \quad B = \frac{2}{\gamma} + R, \quad (26)$$

$$\Omega^2 = \frac{\varrho_0 \omega^2}{\gamma k^2 p_0} + R \cos^2 \vartheta, \quad K = \frac{k_y^P}{k}. \quad (27)$$

Es bedeuten also ϑ und β die Winkel zwischen der Fortpflanzungsrichtung $\mathbf{k} = (k_x, 0, k_z)$ und dem Magnetfeld im Plasma bzw. im Vakuum (Abb. 1).

Das Gleichungssystem der Amplitudenfaktoren \hat{p}, \dots ist überbestimmt. Man findet als triviale Lö-

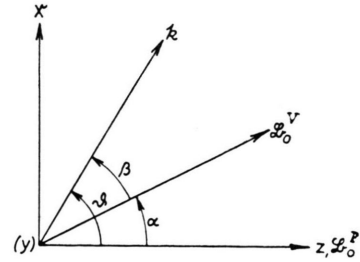


Abb. 1.

sungen die stationäre Strömung längs der Magnetfeldlinien im Plasma

$$\hat{v}_z \neq 0, \quad \hat{v}_x = \hat{v}_y = 0, \quad \omega = 0, \\ k_x = k, \quad k_z = 0, \quad \hat{q} = \hat{p} = 0, \quad \hat{\mathfrak{B}} = \hat{\mathfrak{U}} = 0, \quad (28)$$

und die ALFVÉN-Welle

$$\hat{v}_x \neq 0, \quad \hat{v}_y = \hat{v}_z = 0, \quad k_x = 0, \quad k_z = k, \quad (29) \\ \frac{\omega^2}{k^2} = -\frac{(B_0^P)^2}{\varrho_0}, \quad \hat{\mathfrak{B}} = i \frac{k \hat{v}_x}{\omega} \mathbf{e}_x, \quad \hat{q} = \hat{p} = 0, \quad \hat{\mathfrak{U}} = 0.$$

Für eine nicht triviale Lösung muß gelten

$$k_y^V = k \quad (30)$$

neben zwei weiteren Gleichungen. Diese kann man auffassen als Bestimmungsgleichungen für Ω^2 und K . Führt man noch die neuen Parameter

$$d = H/K, \quad b = B/K \quad (31)$$

ein, so erhält man schließlich

$$\Omega^4 - \Omega^2 \frac{[R^2 + (1 + \frac{\gamma}{2} R) d - (1 - R) b \cos^2 \beta] \cos^2 \vartheta + (1 + R) [(1 + \frac{\gamma}{2} R) d - b \cos^2 \beta] \sin^2 \vartheta}{1 + R + b \cos^2 \beta} \\ + \frac{R^2 [(1 + \frac{\gamma}{2} R) d - b \cos^2 \beta] \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta}{1 + R + b \cos^2 \beta} = 0 \quad (32)$$

$$\text{und} \quad \frac{1}{K^2} = \frac{(1 + R) [(1 + \frac{\gamma}{2} R) d - b \cos^2 \beta] [1 + d(\gamma - 1 - \frac{\gamma}{2} R)]}{\Omega^2} - \frac{R(1 + \frac{\gamma}{2} R) d [(1 + \frac{\gamma}{2} R) d - b \cos^2 \beta] \sin^2 \vartheta}{\Omega^4}. \quad (33)$$

Mit (31) ist in den Gln. (32) und (33) eine interessante Aufteilung gelungen. Sie gestattet, die Stabilität an einer einzigen quadratischen Gleichung für Ω^2 als Funktion der Größen d und $b \cos^2 \beta$ und der übrigen Parameter unabhängig von K zu diskutieren. K wird dann aus (33) bestimmt und liefert über (31) die zugehörigen Werte von H und $B \cos^2 \beta$.

Es werde der Wertebereich bestimmt, in dem d und b für sinnvolle Lösungen variieren dürfen. HAIN, LÜST und SCHLÜTER³ haben gezeigt, daß ω^2 stets reell ist. Nach (27) gilt dann dasselbe für Ω^2 . Führt man in (33) statt d und b die Werte H und B ein, so erhält man für K einen gebrochen rationalen Ausdruck in den reellen Größen Ω^2 , R , H und B . Daher ist K selbst reell und mit $\Re k_y^P > 0$ größer Null. Nach (31) kann man sich daher auf positive Werte von d und b beschränken. Wegen

$$K \cdot b \cos^2 \beta \leq B = \frac{2}{\gamma} + R \quad (34)$$

³ K. HAIN, R. LÜST u. A. SCHLÜTER, Z. Naturforschg. **12 a**, 833 [1957], vgl. auch Anm. ⁴.

⁴ I. B. BERNSTEIN, E. A. FRIEMAN, M. D. KRUSKAL u. R. M. KULSRUD, Proc. Roy. Soc., Lond. A **244**, 17 [1958].

haben nur solche Variationen von $b \cos^2 \beta$ einen Sinn, für welche (33)

$$K \leq \left(\frac{2}{\gamma} + R \right) / (b \cos^2 \beta) \quad (35)$$

ergibt.

Wir diskutieren zwei einfache Grenzfälle der Gln. (32) und (33). Dabei setzen wir $R \neq 0$ voraus. Der Fall $R=0$ bedeutet verschwindendes Plasmamagnetfeld und ist in der Untersuchung von KRUSKAL und SCHWARZSCHILD enthalten.

4. Stabilisierung für kleine Wellenlängen

Es sei $k_y^P \gg h$. Diese Störungen klingen im Plasma mit einer Höhe ab, die klein gegen die homogene Schichtdicke ist. In dieser Näherung haben KRUSKAL und SCHWARZSCHILD gerechnet. Mit (26), (27) und (31) folgt

$$d \ll 1. \quad (36)$$

Wir untersuchen zunächst den Fall

a) $b \cos^2 \beta$ nicht $\gg d$

Das sind solche Wellen, die sich senkrecht zum Vakuumfeld fortpflanzen,

$$\cos^2 \beta \ll 1. \quad (37)$$

Neben einer stets stabilen Störung mit

$$\frac{\varrho_0 \omega^2}{\gamma k^2 p_0} = - \frac{R}{1+R} \cos^2 \vartheta \quad (38)$$

findet man die weitere

$$\Omega^2 = [d(1 + \frac{\gamma}{2} R) - b \cos^2 \beta] \sin^2 \vartheta, \quad K = |\sin \vartheta|. \quad (39)$$

Daraus erhält man

$$\frac{\varrho_0 \omega^2}{\gamma k^2 p_0} = (1 + \frac{\gamma}{2} R) [H - \frac{2}{\gamma} \cos^2 \beta] |\sin \vartheta| - R \cos^2 \vartheta. \quad (40)$$

Unsere Voraussetzungen besagen, daß der erste Ausdruck auf der rechten Seite klein gegen eins ist, und es herrscht Stabilität, wenn nicht auch

$$\cos^2 \vartheta \ll 1. \quad (41)$$

Dieser letzte Fall kann nur eintreten, wenn auch der Winkel α zwischen Vakuum- und Plasmamagnetfeld klein ist, wie aus (37) mit $\vartheta = \beta + \alpha$ folgt. Dann ergibt (40)

$$\frac{\varrho_0 \omega^2}{k^2} = \frac{g \varrho_0}{k} - (B_0^V)^2 \cos^2 \beta - (B_0^P)^2 \cos^2 \vartheta. \quad (42)$$

(42) ergibt für $\alpha=0$ (d. h. $\beta \equiv \vartheta$) und $\cos \vartheta \rightarrow 0$ die KRUSKAL-SCHWARZSCHILD-Instabilität mit

$$\omega^2 \rightarrow g k.$$

(42) bleibt nun für alle ϑ negativ, wenn

$$\alpha^2 > \frac{g \varrho_0}{k} \left(\frac{1}{(B_0^V)^2} + \frac{1}{(B_0^P)^2} \right). \quad (43)$$

Durch Wahl von α gemäß dieser Bedingung läßt sich daher diese Instabilität vermeiden.

b) $b \cos^2 \beta \gg d$

Das sind die übrigen Störungen, die nicht senkrecht zum Vakuumfeld laufen. Damit Instabilität auftreten könnte, müßte

$$4 R [R + 1 + b \cos^2 \beta] [R \cos^2 \vartheta + b \cos^2 \beta] \cos^2 \vartheta < 0 \quad (44)$$

gelten, wie man aus (32) mit $\omega^2 > 0$ erhält. Diese Forderung ist unerfüllbar. Das beweist gleichzeitig die in der Arbeit¹ ausgesprochene Vermutung, daß alle anderen Störungen stabil sind.

c) Die Näherung dieses Abschnittes $h \ll k_y^P$ ist nicht mit der Näherung „Wellenlänge klein gegen homogene Schichtdicke“ identisch. Sie ist mit $H \ll K$ für kleine K eine schärfere Einschränkung als $H \ll 1$. Wir wollen zeigen, daß auch im erweiterten Fall $H \ll 1$ alle Störungen stabilisierbar sind. Außer der obigen Rechnung benötigen wir nur noch eine Untersuchung der Fälle $H \ll 1$ und gleichzeitig $K \ll 1$.

Aus Gl. (33) folgt mit $H \ll 1$ für $K \ll 1$ auch $\Omega^2 \ll 1$. Wegen (27)

$$\frac{\varrho_0 \omega^2}{\gamma k^2 p_0} = \Omega^2 - R \cos^2 \vartheta \quad (27 a)$$

sind solche Störungen sicher stabil, wenn nicht gleichzeitig

$$\cos^2 \vartheta \ll 1 \quad \text{ist.} \quad (45)$$

Für diesen letzten Fall ergibt aber (32)

$$\Omega^2 = \frac{R^2}{1+R} \cos^2 \vartheta, \quad (46)$$

und nach (27 a) ist auch diese Störung mit

$$\frac{\varrho_0 \omega^2}{\gamma k^2 p_0} = - \frac{R}{1+R} \cos^2 \vartheta \quad (47)$$

stets stabil.

Wir fassen als Ergebnis dieses Abschnittes zusammen: Alle Störungen, deren Wellenlängen klein gegen die homogene Schichtdicke sind, werden durch Kreuzung der Magnetfelder um einen Winkel α nach (43) stabilisiert.

5. Instabilität für große Wellenlängen

Wir betrachten Störungen, deren relative Stärke langsamer als die barometrische Verteilung abklingt,

$$k_y^p \ll h. \quad (48)$$

Das bedeutet $d \gg 1$. Für Ω^2 und K erhält man aus (32) und (33) neben einer stets stabilen Störung

$$\Omega^2 = \frac{(1 + \frac{\gamma}{2} R) H}{\cos^2 \beta + \sqrt{1 + \cos^4 \beta}},$$

$$K = \frac{(1 + R \sin^2 \vartheta) [\cos^2 \beta + \sqrt{1 + \cos^4 \beta}] - B \cos^2 \beta}{1 + R}. \quad (49)$$

Daraus ergibt sich die Frequenz

$$\omega^2 = \frac{g k}{\cos^2 \beta + \sqrt{1 + \cos^4 \beta}}. \quad (50)$$

$$\hat{v}_x = -i \hat{v}_y (\cos^2 \beta + \sqrt{1 + \cos^4 \beta}) \sin \vartheta,$$

$$\hat{A}_x = \frac{\hat{v}_y}{\omega} \cos \alpha, \quad \hat{A}_z = -\frac{\hat{v}_y}{\omega} \sin \alpha, \quad \hat{A}_y = -i \frac{\hat{v}_y}{\omega} \sin \beta,$$

$$\hat{q} = \frac{\hat{v}_y}{\omega} (h - k M) q_0, \quad \hat{p} = \frac{\hat{v}_y}{\omega} (h - \gamma k M) p_0,$$

$$\hat{\mathfrak{B}} = \frac{\hat{v}_y}{\omega} B_0^p \left\{ \frac{h}{2} \mathbf{e}_z + k [\cos \vartheta \sin \vartheta \mathbf{e}_x + i \cos \vartheta \mathbf{e}_y + (\cos \vartheta - M) \mathbf{e}_z] \right\}.$$

Dabei wurde gesetzt

$$M(\beta, \vartheta) = \frac{(\cos^2 \beta + \sqrt{1 + \cos^4 \beta}) R \cos^2 \vartheta - (\frac{\gamma}{2} + R) \cos^2 \beta}{1 + R}. \quad (52)$$

Die Störung ist in Übereinstimmung mit (48) in erster Näherung eine lokale Verschiebung des Plasmas mit $d/dt = 0$. Erst in zweiter Näherung kommen Zustandsänderungen ins Spiel.

In diesem Abschnitt ergibt sich das Auftreten instabiler Störungen nach Art der hydromagnetischen RAYLEIGH-TAYLOR-Instabilität.

Zusammenfassend stellen wir fest, daß eine Kreuzung der Magnetfelder im Plasma und Vakuum gestattet, alle Störungen kleiner Wellenlängen zu stabilisieren. Werden die nur für große Wellenlängen

Diese Störungen sind sämtlich instabil. Im Falle $\beta = 90^\circ$ stellt (50) wieder die hydromagnetische RAYLEIGH-TAYLOR-Instabilität⁴ dar. Die Anwachsrate ist im Fall $\cos \beta = 1$, in dem das Vakuummagnetfeld mitgewellt wird, nur um den Faktor 0,644 kleiner.

Der Winkel ϑ , d. h. das Plasmamagnetfeld taucht in (50) nicht mehr auf. Das liegt daran, daß die für eine Änderung des Plasmafeldes erforderliche Energie gegenüber der für das Vakuumfeld keine Rolle spielt, weil die Störung im Plasma absolut schon mit der homogenen Schichtdicke abfällt, während im Vakuum die größere Wellenlänge das Abklingen bestimmt.

Wir geben noch die Amplitudenfaktoren im Fall (49) an:

$$\hat{v}_z = -i \hat{v}_y (\cos^2 \beta + \sqrt{1 + \cos^4 \beta}) \cos \vartheta,$$

auf tretenden Instabilitäten etwa durch Periodizitätsforderungen der Anordnung ausgeschlossen, so läßt sich mit einer solchen, den bloßen (destabilisierenden) Austausch von Plasma und Magnetfeld verhindernden Kreuzung eine völlige Stabilität erreichen.

An dieser Arbeit hat Herr Dr. R. KIPPENHAHN wesentlichen Anteil. Sie wurde mit ihm zusammen begonnen und ist aus gemeinsamen Diskussionen entstanden, für die der Verfasser herzlich dankt. Den Hinweis auf das hier behandelte Problem verdanken wir Herrn Prof. Dr. A. SCHLÜTER.